

Zur kinematischen Geometrie der drei Grundaufgaben der Getriebelehre

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 43, 1992,
S.191-206



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zur kinematischen Geometrie der drei Grundaufgaben der Getriebelehre

Von **Bekir Dizioğlu***, Wolfenbüttel

(Eingegangen am 3. 1. 1992; in veränderter Fassung am 20. 3. 1992
nach Annahme durch die Klasse für Ingenieurwissenschaften am 28. 2. 1992)

Zusammenfassung

Kinematische Geometrie der drei Grundprobleme in der Getriebelehre

In der ebenen Kinematik werden Vektoren mit Hilfe komplexer Zahlen dargestellt. In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die drei Grundaufgaben der Getriebelehre in der ebenen wie auch in der räumlichen Getriebelehre behandelt. Die Lösung in der Ebene geschieht mit Hilfe komplexer Zahlen. Sind von den drei Kurven: Gangpolkurve, Rastpolkurve und Bahnkurve eines Punktes zwei vorgegeben, so läßt sich die dritte Kurve ermitteln.

Die entsprechenden drei Grundprobleme sind im Raum mit Hilfe der Achsenflächen und Bahnflächen formuliert worden.

I.

Bekanntlich kann man sich jede Bewegung eines starren Körpers dadurch entstanden denken, daß eine Regelfläche (auch geradlinige oder Strahlfläche genannt) als bewegliches Axoid auf einer anderen Regelfläche, dem festen Axoid (Rastaxoid), zugleich abrollt und abgeleitet oder, nach einer Formulierung von *Reuleaux*, „abschrotet“. Bei dem eben beweglichen Körper sind diese Axoide jeweils ein Zylinder. Der Bewegungsvorgang läßt sich durch das Abrollen der Gangpolbahn auf der Rastpolbahn darstellen [1].

Eine andere, dem Gangaxoid fest verbundene Gerade beschreibt dabei eine windschiefe Regelfläche. In der ebenen Bewegung des Körpers beschreibt ein Punkt des beweglichen Systems die Bahnkurve dieses Punktes.

In der *ebenen* Getriebelehre sind Rastpolkurve, Gangpolkurve und Bahnkurve eines Punktes der beweglichen Ebene von großer Bedeutung. Daher läßt sich in der ebenen Kinematik eine allgemeine Syntheseaufgabe mit Hilfe dieser Kurven formulieren [2].

* Prof. em. Dr.-Ing. B. Dizioğlu · Marienburgweg 36 · 3340 Wolfenbüttel

In der räumlichen Getriebelehre sind Aufgaben, die der ebenen Kinematik entsprechen, bisher nicht behandelt worden. Im folgenden werden Aufgabenstellungen vorgegeben und Lösungswege erörtert, die der Raumkinematik entsprechen. Vorher aber sollen die oben genannten Aufgaben im Falle der ebenen Bewegung mit Hilfe der komplexen Vektordarstellung zusammengefaßt werden.

Es seien die Gangpolkurve mit Γ , die Rastpolbahn mit C und die Bahnkurve eines Punktes A der Gangebene mit C' bezeichnet. Wir nehmen an, zwei von diesen drei Kurven sind gegeben und die dritte Kurve wird gesucht (Abb. 1).

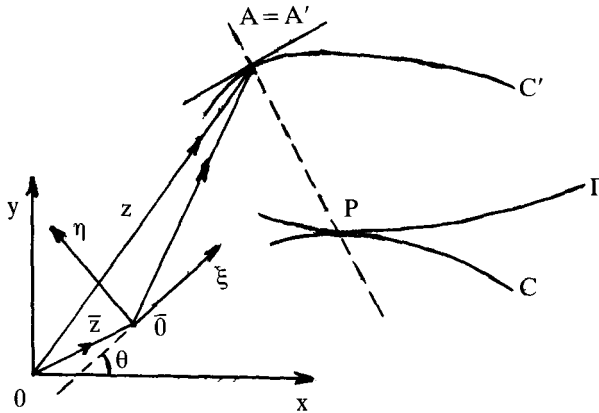


Abb. 1:

Gangpolkurve Γ und Rastpolkurve C einer ebenen Bewegung. C' ist die Bahnkurve des Punktes A in der Rastebene.

1. Die Rastpolbahn C sei bezüglich des Koordinatensystems $0xy$

$$x + iy \equiv z = z(u).$$

Für die Gangpolbahn Γ gilt bezüglich des rechtwinkligen Koordinatensystems $0\xi\eta$, das in der beweglichen Ebene liegt

$$\xi + i\eta \equiv \zeta = \zeta(v).$$

Wenn die Kurve Γ ohne zu gleiten auf der Kurve C abrollt, die sich dabei berühren, wird

$$dz = d\zeta e^{i\Theta}. \quad (1)$$

Θ ist der Drehwinkel der beweglichen Achse 0ξ . Man kann daher schreiben

$$z = \bar{z} + e^{i\Theta} \zeta. \quad (2)$$

Daraus folgt

$$\bar{z} = z - e^{i\Theta} \zeta. \quad (3)$$

Wenn der Punkt mit der Gangpolbahn fest verbunden ist, ist

$$z' = \bar{z} + e^{i\Theta} \zeta'. \quad (4)$$

Aus (4) folgt sofort

$$z' = z + (\zeta' - \zeta) e^{i\Theta} \quad (5)$$

$$\text{oder } z' = z + (\zeta' - \zeta) \frac{dz}{d\zeta}. \quad (6)$$

Die Gleichungen (3) und (5) sind für die folgenden Untersuchungen grundlegend.

2. Zuerst sei die Rastpolkurve C und die Kurve eines Punktes Γ gegeben und die Gangpolkurve gesucht. Indem man nach Gleichung (3) die Module der beiden Kurven gleichsetzt, erhält man

$$\sqrt{dz \, dz_0} = \sqrt{d\zeta \, d\zeta_0}$$

oder

$$\sqrt{\frac{dz}{du} \frac{dz_0}{du}} du = \pm \sqrt{\frac{d\zeta}{dv} \frac{d\zeta_0}{dv}} dv, \quad (7)$$

Der Parameter v soll eine Funktion von u sein und die Gangpolkurve C' sei durch die Gleichung (5') vorgegeben.

3. Bei dem zweiten Problem sei die Rastpolbahn C gegeben durch die Gleichung (1) und die Gangpolbahn C' durch

$$z' = z'(w).$$

Gesucht ist die Bahnkurve Γ . Aus der Gleichung (5) folgt

$$\zeta = \zeta' - (z' - z) e^{-i\Theta}. \quad (8)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich mit Hilfe der Bedingung (3)

$$dz' = i(z' - z) d\Theta \quad (9)$$

und folglich

$$dz'_0 = -i(z'_0 - z_0) d\Theta. \quad (9')$$

Aus den beiden Gleichungen (9) und (9') erhält man

$$\frac{dz'}{z' - z} + \frac{dz'_0}{z'_0 - z_0} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{z' - z} + \frac{dz'}{dw} + \frac{1}{z'_0 - z_0} \frac{dz'_0}{dw} = 0. \quad (11)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$i d\Theta = \frac{dz'}{z' - z}$$

finden wir eine Funktion $\Theta = \Theta(u)$. Schließlich bestimmt Gleichung (8) die Gangpolkurve Γ , wobei ζ eine beliebige Konstante ist.

4. Es seien gegeben die Gangpolbahn und die Bahnkurve eines Punktes. Gesucht wird die Rastpolbahn. Aus den Gleichungen (5) und (3) folgt

$$dz' = i(\zeta' - \zeta) e^{i\Theta} d\Theta \quad (12)$$

und die dazu konjugierte Beziehung

$$\begin{aligned} dz'_0 &= i(\zeta'_0 - \zeta_0) e^{-i\Theta} d\Theta. \\ \sqrt{dz' dz'_0} &= \sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)} d\Theta \\ \frac{dz'}{dz'_0} &= -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta'_0 - \zeta_0} e^{2i\Theta}. \end{aligned} \quad (13)$$

Durch die Elimination Θ erhalten wir die Differentialgleichung

$$d \log \left(\frac{dz'}{dz'_0} \right) + \frac{d\zeta}{\zeta' - \zeta} - \frac{d\zeta_0}{\zeta'_0 - \zeta_0} = \frac{2i \sqrt{dz\zeta dz'_0}}{\sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)}}. \quad (14)$$

Dadurch wird $w(v)$ bestimmt, für Θ brauchen wir eine Quadratur und schließlich erhalten wir aus der Gleichung

$$z = z' - (\zeta' - \zeta) e^{i\Theta} \quad (15)$$

die gesuchte Gangpolkurve.

II.

Bevor wir die entsprechenden Grundaufgaben im Falle der Raumbewegung des starren Systems formulieren, sollen vorerst einige bekannte Eigenschaften der Regelflächen Erwähnung finden [3].

Bewegt sich eine Gerade zwangsläufig im Raum, so entsteht eine einparametrische Schar von Geraden. Die dabei erzeugte Fläche wird Regelfläche (geradlinige Fläche bzw. Strahlfläche) genannt. Bewegt sich eine Gerade in der Weise, daß zwei mittelbar aufeinanderfolgende Lagen einen Punkt gemeinsam haben, so beschreibt sie eine „abwickelbare“ Regelfläche. Eine windschiefe Regelfläche entsteht, wenn zwei Nachbarlagen einer bewegten Geraden nicht nur einen kleinen Winkel, sondern auch einen von Null verschiedenen kleinsten Abstand aufweisen. Das Verhältnis dieses Abstandes zum Winkel (in Bogenmaß) heißt Verteilungsparameter; er ist für die abwickelbaren Regelflächen Null. Der Zentralpunkt ist der Punkt der Geraden, welcher der Nachbargeraden am nächsten gelegen ist. Eine Ebene durch die Gerade, welche zur Nachbargeraden parallel ist, heißt „asymptotische Ebene“, die dazu senkrechte Ebene „Zentralebene“, das gemeinsame Lot von Nachbargeraden „Striktionsstrahl“, der Ort der Zentralpunkte „Striktionslinie“ (bei der abwickelbaren Regelfläche „Rückkehrkurve“) (Abb. 2).

III.

Die Achsenflächen haben für die allgemeinste Bewegung eines starren räumlichen Systems dieselbe Bedeutung wie die Polkurven für die ebene Bewegung und wie die Polkegel in der sphärischen Bewegung. Für die Drehung eines starren Körpers um

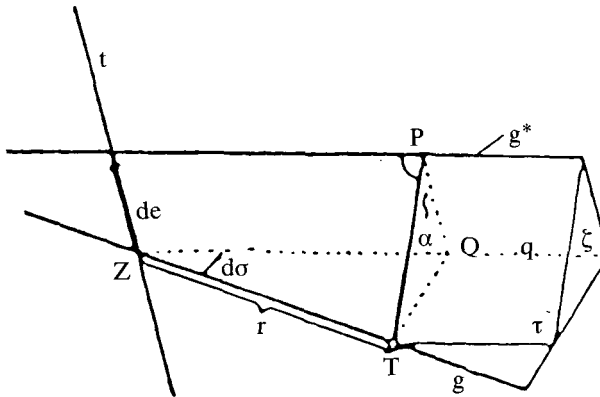


Abb. 2:

Axoide als windschiefe Regelfläche. Es sind: g und g^ zwei benachbarte Erzeugende (Schraubachsen) der Regelfläche; \overline{de} die Länge des Gemeinlotes von g, g^* ; $d\sigma$ der Winkel von g, g^* ; $(de/d\sigma) = k$ Parameter der Erzeugenden g , wobei $r \cdot \cotg \alpha = k$. Ein Punkt T von g hat einen Abstand r von Z und bestimmt mit g^* eine Ebene τ . Diese bildet mit der von q und g^* bestimmten Ebene ζ einen Winkel α , welcher in dem rechtwinkligen Dreieck PQT vorkommt. Im Grenzfall, wo sich g^* mit g vereinigt, wird τ die Berührungsebene des Punktes T , $[gq]$ die asymptotische Ebene, ζ die Zentralebene und Z der Zentralpunkt der Erzeugenden g . q ist die Parallele durch Z zu g^* .*

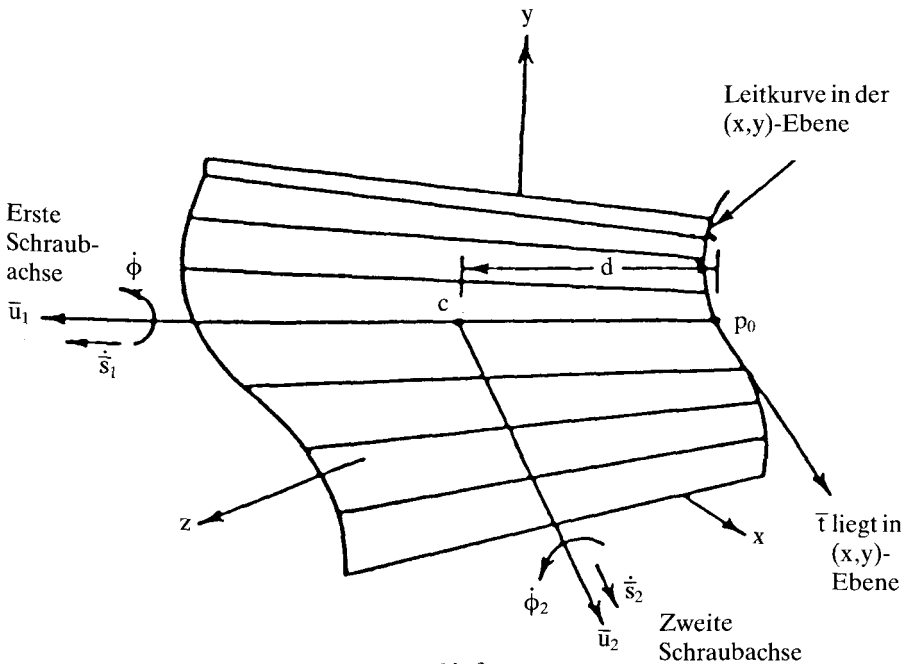


Abb. 3:

Kinematische Geometrie einer Regelfläche

einen festen Punkt allerdings mit dem bemerkenswerten Unterschied: Während man für die beiden Polkurven und auch die beiden Polkegel Unabhängigkeit voneinander annehmen kann, sind die beiden Achsenflächen durch die Bedingung verknüpft, daß sie in je zwei entsprechenden Erzeugenden gleiche Parameter haben müssen. Ist also die eine von beiden Flächen beispielsweise abwickelbar, so ist es auch die andere; beide können ferner nur gleichzeitig in Zylinderflächen ausarten.

Für die Betrachtung der Achsenflächen bzw. Regelflächen können die folgenden geometrischen Parameter eingeführt werden [2]: Der Verteilungsparameter $k = \frac{dc}{d\sigma}$, die längs der Erzeugenden fallende Geschwindigkeitskomponente des Zentralpunktes (Kehlpunkt) $h = v \cdot \cos v$ und die ihr entsprechende geodätische Krümmung τ [3] des Richtkegels (Abb. 2). Beim Abrollen ist außer $h = h'$ auch $k = k'$. Diese Parameter definieren die beiden Regelflächen. Sind die fünf Größen $k, h, h', \theta, \theta'$ als Funktionen von t gegeben, so ist damit eine zwangsläufige Bewegung bestimmt. Es können also die erzeugten Bahnkurven, Enveloppen und Regelflächen sowie auch deren Parameter analytisch durch sie ausgedrückt werden.

IV.

Die allgemeine Bewegung des starren Körpers läßt sich bekanntlich auf eine Schraubung zurückführen. Diese Schraubung kann nun in zwei Schraubungen, wie folgt, zusammengesetzt werden: Eine erste bzw. zweite Schraubung mit den Bewegungsparametern $\dot{\Phi}_1$ bzw. $\dot{\Phi}_2$ als Winkelgeschwindigkeiten, \dot{s}_1 und \dot{s}_2 als Schiebungsgeschwindigkeiten (Abb. 3). Die erste Schraubung liegt längs der erzeugenden Geraden der Regelfläche des beweglichen Körpers und die zweite Schraubung hat eine zur ersten Schraubung senkrechte Achse. Der Schnittpunkt dieser beiden Achsen (\bar{u}_1 -Achse und \bar{u}_2 -Achse) ist der Zentralpunkt (Kehlpunkt) c der erzeugenden Geraden. Der Verteilungsparameter \dot{s}_{2H} entspricht der Steigung der zweiten Schraubung. In der folgenden Betrachtung werden die Ableitungen nach der Zeit gebildet und nach den Regeln der Matrizenrechnung vorausgesetzt. In Abb. 3 ist die Regelfläche auf das orthogonale Achsensystem (x, y, z) bezogen. Als Leitkurve der Fläche wurde die Schnittlinie dieser Fläche mit der (x, y) -Ebene des Koordinatensystems genommen.

Der Abstand d des auf der Leitkurve liegenden Punktes p_0 zu dem Zentralpunkt c der erzeugenden Geraden ist [3]:

$$\begin{aligned} d &= - \frac{(\bar{t})^T (\bar{u}_1)}{(\bar{u}_1)^T (\bar{u}_1)} \\ &= - \frac{(\dot{p}_{0x}, \dot{p}_{0y}, \dot{p}_{0z})^T (\dot{u}_{1x}, \dot{u}_{1y}, \dot{u}_{1z})}{(\dot{u}_{1x}, \dot{u}_{1y}, \dot{u}_{1z})^T (\dot{u}_{1x}, \dot{u}_{1y}, \dot{u}_{1z})} \end{aligned} \quad (1)$$

Für $\dot{p}_{0z} = 0$ und $\dot{p}_{0z} = 0$ erhält man

$$d = \frac{\dot{p}_{0x} \dot{u}_{1x} + \dot{p}_{0y} \dot{u}_{1y}}{\dot{u}_{1x}^2 + \dot{u}_{1y}^2 + \dot{u}_{1z}^2} \quad (2)$$

Die Koordinaten des Zentralpunktes c sind

$$\begin{aligned} c_x &= p_{0x} + u_{1x} d \\ c_y &= p_{0y} + u_{1y} d \\ c_z &= 0.0 + u_{1z} d. \end{aligned} \quad (3)$$

Dabei wird d in Richtung von \bar{u}_1 positiv genommen.

Der Richtungskosinus der Achse der zweiten Schraubung \bar{u}_2 sind zu bestimmen aus

$$\bar{u}_2 = \frac{\bar{u}_1 \times \dot{\bar{u}}_1}{\sqrt{\dot{u}_{1x}^2 + \dot{u}_{1y}^2 + \dot{u}_{1z}^2}}. \quad (4)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} u_{2x} &= \frac{u_{1y} \dot{u}_{1z} - \dot{u}_{1y} u_{1z}}{\sqrt{\dot{u}_{1x}^2 + \dot{u}_{1y}^2 + \dot{u}_{1z}^2}} = \frac{u_{1y} \dot{u}_{1z} - \dot{u}_{1y} u_{1z}}{|\dot{\bar{u}}_1|} \\ u_{2y} &= \frac{-u_{1x} \dot{u}_{1z} + \dot{u}_{1x} u_{1z}}{|\dot{\bar{u}}_1|} \\ u_{2z} &= \frac{u_{1x} \dot{u}_{1y} - \dot{u}_{1x} u_{1y}}{|\dot{\bar{u}}_1|}. \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist

$$\dot{\phi} = |\dot{\bar{u}}_1|. \quad (5)$$

Die Schiebungsgeschwindigkeit in der Richtung von \bar{u}_2 ist

$$\dot{S}_2 = (\bar{t})^T \left(\frac{\bar{u}_1 \times \dot{\bar{u}}_1}{|\dot{\bar{u}}_1|} \right). \quad (6)$$

$$\dot{S}_2 = \frac{\dot{p}_{0x}(u_{1y} \dot{u}_{1z} - \dot{u}_{1y} u_{1z}) + \dot{p}_{0y}(u_{1z} \dot{u}_{1x} - \dot{u}_{1z} u_{1x})}{|\dot{\bar{u}}_1|}. \quad (7)$$

Aus (5) und (7) erhält man für die Steigung der zweiten Schraubung

$$\dot{S}_{2IP} = \frac{\dot{S}_2}{\dot{\phi}_2} = \frac{\dot{p}_{0x}(u_{1y} \dot{u}_{1z} - \dot{u}_{1y} u_{1z}) + \dot{p}_{0y}(u_{1z} \dot{u}_{1x} - \dot{u}_{1z} u_{1x})}{\dot{u}_{1x}^2 + \dot{u}_{1y}^2 + \dot{u}_{1z}^2}. \quad (8)$$

V.

Das räumliche Doppelschiebergetriebe als Beispiel [4].

In Abb. 4 ist die Eingangsgeschwindigkeit $\dot{\bar{a}}$ und die Eingangsbeschleunigung $\ddot{\bar{a}}$ des Antriebsgliedes (Schiebers) wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= (0.0, 3.0, 0.0) \\ \dot{\bar{a}} &= (0.0, 1.0, 0.0) \\ \ddot{\bar{a}} &= (0.0, 1.0, 0.0). \end{aligned}$$

Der zweite Schieber hat die Koordinaten $\bar{b} = (8.66, 0.0, 4.00)$

und die Koordinaten des Koppelpunktes c seien

$$\bar{c} = (-16.00/8.66, 3.00, 4.00).$$

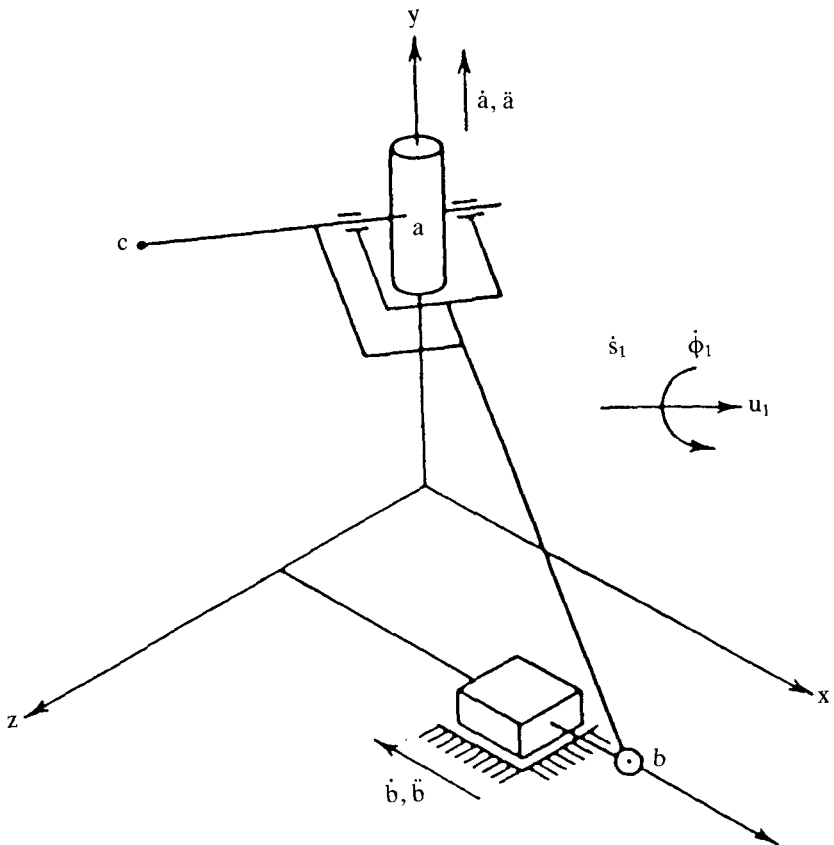


Abb. 4:
Das räumliche Doppelschiebegetriebe

Es ist also

$$\begin{aligned} \dot{a}_x &= \dot{a}_z = \dot{b}_y = \dot{b}_z = 0 \\ \dot{a}_y &= \dot{c}_y = 1 \\ u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + u_{1z}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Daraus erhalten wir für die Matricelemente der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{d}_{12}a_y + \dot{d}_{14} &= 0 \\ \dot{d}_{32}a_y + \dot{d}_{34} &= 0 \\ \dot{d}_{21}b_x + \dot{d}_{23}b_z + \dot{d}_{24} &= 0 \\ \dot{d}_{31}b_x + \dot{d}_{34} &= 0 \\ u_x c_2 - u_z c_x &= 0 \quad [\text{von } \dot{\phi} \bar{u} \times (\bar{c} - \bar{a})] \\ \dot{d}_{24} - 1.0 &= 0 \\ u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + u_{1z}^2 - 1.0 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{und } \begin{aligned} \dot{d}_{12} &= -u_{1z}\dot{\phi} & \dot{d}_{21} &= -\dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{14} &= u_{1z}\dot{\phi}p_{0y} & \dot{d}_{24} &= u_{1z}p_{0x} \\ \dot{d}_{32} &= u_{1x}\dot{\phi} & \dot{d}_{23} &= -\dot{d}_{32} \\ \dot{d}_{34} &= u_{1y}p_{0x} & \dot{d}_{31} &= u_{1y}\dot{\phi}. \end{aligned} \quad (11)$$

Aus (10) bestimmen wir schließlich die sieben Parameter der Schraubung 1. Ordnung der Fläche. Die Parameter der Schraubung 2. Ordnung $\dot{p}_{0x}, \dot{p}_{0y}, \dot{u}_{1y}, \dot{u}_{1z}, \Phi_1$ und s_1 sind aus den sieben Bedingungsleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 0 \\ \ddot{a}_z &= 0 \\ \ddot{b}_y &= 0 \\ \ddot{b}_z &= 0 \\ \ddot{a}_y &= \ddot{c}_y = 1 \\ u_{1x}\dot{u}_{1x} + u_{1y}\dot{u}_{1y} + u_{1z}\dot{u}_{1z} &= 0 \quad \text{zu ermitteln.} \end{aligned} \quad (12)$$

Die Ermittlung der sieben Parameter der zweiten Schraubung der Flächenerzeugung erfolgt aus der Lösung der Gleichung (13) nach dem erwähnten Schema wie in Gleichung (12). In Tabelle 1, 2 und 3 sind die Ergebnisse des Zahlenbeispiels zusammengefaßt. Es ist zu erwähnen, daß diese Zahlenwerte von den Daten der Antriebsbewegung des Schiebers unabhängig sind.

Die Elemente der Beschleunigungsmatrix sind aus den folgenden Beziehungen zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \ddot{d}_{12}a_y + \ddot{d}_{14} &= 0 \\ \ddot{d}_{32}a_y + \ddot{d}_{34} &= 0 \\ \ddot{d}_{21}b_x + \ddot{d}_{23}b_z + \ddot{d}_{24} &= 0 \\ \ddot{d}_{31}b_x + \ddot{d}_{33}b_z + \ddot{d}_{34} &= 0 \\ \ddot{d}_{21}c_x + \ddot{d}_{23}c_z &= 0 \\ \ddot{d}_{22}a_y + \ddot{d}_{24} &= 1 \\ u_{1x}\dot{u}_{1x} + u_{1y}\dot{u}_{1y} + u_{1z}\dot{u}_{1z} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Tabelle 1: Die Parameter der ersten Schraubung (Abb. 3).

	Eingang		Erste Schraubungsachse								
	\dot{a}_y	\ddot{a}_y	Lage der Schraube						Geschwindigkeiten		
			p_{0x}	p_{0y}	p_{0z}	u_{x1}	u_{y1}	u_{z1}	$\dot{\phi}_1$	\dot{S}_1	\dot{S}_{1IP}
1	1.0	1.0							-0.10593127	0.14375361	
2	2.0	3.0							-0.21186254	0.28750723	
3	3.0	5.0							-0.31779382	0.43126084	
4	4.0	7.0							-0.42372509	0.57501446	
5	5.0	9.0	10.290435	2.3731889	0.0000000	-0.41496877	0.14375361	0.89840738	-0.52965636	0.71876807	-1.3570460

Tabelle 2: Die Parameter der zweiten Schraubung (Abb. 3).

	Eingang		Erste Schraubungsachse								
	\dot{a}_y	\ddot{a}_y	Lage der Schraube						Geschwindigkeiten		
			c_x	c_y	c_z	u_{x2}	u_{y2}	u_{z2}	$\dot{\phi}_2$	\dot{S}_2	\dot{S}_{2IP}
1	1.0	1.0	15.810808	0.46081956	-11.951607	-0.89367829	-0.24966517	-0.37283566	0.059733263	0.20532835	3.4374206
2	2.0	3.0							0.11946653	0.41065669	
3	3.0	5.0							0.17919979	0.61598504	
4	4.0	7.0							0.23893305	0.82131339	
5	5.0	9.0							0.29866632	1.0266417	

Tabelle 3: Die Parameter der Beschleunigung.

	Eingang		Die Parameter der Beschleunigung							
	\dot{a}_y	\ddot{a}_y	Geschwindigkeit der Schraublage			Geschwindigkeit in der Schraubrichtung			Beschleunigung	
			\dot{P}_{0x}	\dot{P}_{0y}	\dot{P}_{0z}	\dot{u}_{x1}	\dot{u}_{y1}	\dot{u}_{z1}	$\ddot{\phi}_1$	\ddot{S}_1
1	1.0	1.0	-0.43968504	0.75144095	0.0000000	-0.010196740	0.057200711	-0.013862461	-0.11031311	0.20095433
2	2.0	3.0	-0.87937008	1.5028819		-0.020393480	0.11440142	-0.027724923	-0.33532118	0.66006369
3	3.0	5.0	-1.3190551	2.2543228		-0.030590220	0.17160213	-0.041587384	-0.56909293	1.2335745
4	4.0	7.0	-1.7587402	3.0057638		-0.040786960	0.22880285	-0.055449846	-0.81162837	1.9214867
5	5.0	9.0	-2.1984252	3.7572047		-0.050983700	0.28600356	-0.069312307	-1.0629275	2.7238003

VI.

Beispiel zur ersten Grundaufgabe der räumlichen Getriebelehre

A.

In [2], [6] sind die drei Grundaufgaben der räumlichen Getriebelehre wie folgt formuliert worden:

1. Es sind gegeben die ruhende Achsenfläche (Rastaxoid) und die Bahnkurve eines Systempunktes. Gesucht ist die bewegliche Achsenfläche (Gangaxoid).
2. Es sind gegeben die Richtkegel der ruhenden Achsenfläche und die Bahnkurve zweier Systempunkte. Zu bestimmen sind die ruhende Achsenfläche und die beweglichen Achsenflächen.
3. Es sind gegeben die ruhende Achsenfläche und die von einer Geraden erzeugten Regelfläche. Zu ermitteln ist die bewegliche Achsenfläche.

Die Ableitungen in der früheren Arbeit des Verfassers [2], [6] führen unmittelbar zu den Lösungen dieser Probleme: man muß nur die einzelnen Ergebnisse der genannten Arbeit zur Anwendung bringen. Es sei aber zusätzlich der folgende wichtige Satz erwähnt: Das von einem räumlichen bewegten Punkt auf die augenblickliche Schraubachse gefällte Lot steht senkrecht auf der Bahntangente (Richtung der Bahngeschwindigkeit) an diesem Punkt (Abb. 5). Diese Schraubenachse ist offenbar eine erzeugende Gerade des Rastaxoids, das naturgemäß eine Regelfläche ist.

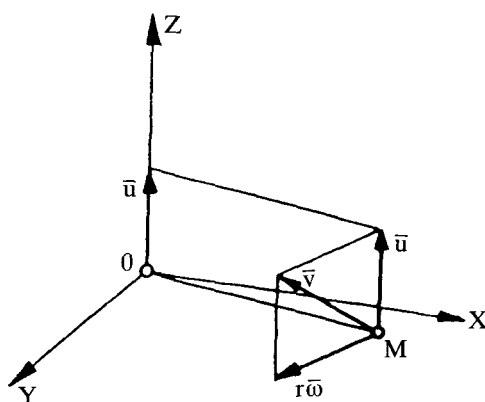


Abb. 5:

Die Gerade $M0$ ist das Gemeinlot der Bahntangenten und der Erzeugenden der Rastaxoide.

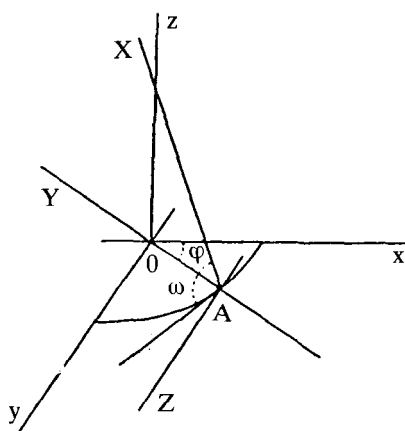


Abb. 6:

AX ist die erzeugende Gerade der Rastaxoide, $(0.xyz)$ ist das feste Koordinatensystem.

Antomari [7] gibt die Lösung dieser Grundprobleme auf Grund anderer Invarianten. Der bewegliche Körper wird dabei zwangsläufig geführt durch die Führung der verschiedenen Punkte an den fünf Flächen. Hierbei werden für die Betrachtung der Achsenflächen die folgenden geometrischen Parameter eingeführt: der Parameter k (Verteilungsparameter), die längs der Erzeugenden fallende Geschwindigkeitskomponente des Zentralpunktes h und die ihr entsprechende geodätische Krümmung Θ des Richtungskegels. Diese Parameter definieren die Regelflächen. Sind diese als Funktionen von t gegeben, so ist damit eine zwangsläufige Bewegung bestimmt. Es können also die erzeugten Bahnkurven, Enveloppen und die Regelflächen sowie auch deren Parameter analytisch durch sie ausgedrückt werden.

B.

(0. xyz) sei ein festes rechtwinkliges Dreiein. Die Bahnkurve des Punktes sei durch die folgenden Gleichungen vorgeschrieben (Abb. 6):

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \left(1 + \frac{u}{4} \operatorname{tg} \omega\right) r \cos \psi - \frac{v}{4} r \sin \omega \sin \psi, \\ y = \left(1 + \frac{u}{4} \operatorname{tg} \omega\right) r \sin \psi + \frac{v}{4} r \sin \omega \cos \psi, \\ z = \frac{v}{4} r \operatorname{tg} \omega \sin \omega, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} e^{\psi \cos \omega} + e^{-\psi \cos \omega} = u, \\ e^{\psi \cos \omega} - e^{-\psi \cos \omega} = v, \end{array} \quad (1)$$

wobei ω und r Konstanten und ψ eine veränderliche Größe sind. Als Rastaxoid nehmen wir ein einschaliges Hyperboloid um die Achse Oz , dessen Kehlkreis in der Ebene (xy) liegt, deren Radius r ist und deren Erzeugende mit der Ebene (xy) den Winkel ω schließt. Der Kehlkreis liegt also in der Ebene (xy) . Das Dreiein dieser Fläche in A besteht aus AX , OAY und aus AZ , wobei AZ auf der von AX und $A0Y$ gebildeten Ebene senkrecht steht. Die neun Richtungskosinusse der Achsengeraden dieses Dreieins sind wie folgt definiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -\cos \omega \sin \varphi, \\ \beta = \cos \omega \cos \varphi, \\ \gamma = \sin \omega; \end{array} \right. \quad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\cos \varphi, \\ \beta_1 = \sin \varphi, \\ \gamma_1 = 0; \end{array} \right. \quad (3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = \sin \omega \sin \varphi, \\ \beta_2 = -\sin \omega \cos \varphi, \\ \gamma_2 = \cos \omega. \end{array} \right. \quad (4)$$

Wenn man mit t den Bogen des sphärischen Bildes des Hyperboloids und mit k den Verteilungsparameter dieser Fläche bezeichnet, dann sind

$$dt = \cos \omega d\varphi, \quad k = -r \operatorname{tg} \omega.$$

Schließlich seien die Koordinaten von A

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad y_1 = r \sin \varphi, \quad z_1 = 0. \quad (5)$$

Vorerst wollen wir die Beziehung zwischen φ und ψ , d. h. zwischen den Punkten der Bahnkurve und der Erzeugenden des Hyperboloids ermitteln. Zu diesem Zweck bestimmen wir X, Y, Z -Koordinaten eines Punktes bezüglich des beweglichen Dreieins (A, XYZ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x(x - x_1) + \beta(y - y_1) + \gamma z, \\ Y = x_1(x - x_1) + \beta_1(y - y_1) + \gamma_1 z, \\ Z = x_2(x - x_1) + \beta_2(y - y_1) + \gamma_2 z, \end{array} \right. \quad (6)$$

wo $x, y, z; x_1, y_1, z_1$ durch die Gleichungen (1) und (5) definiert sind. Man erhält durch diese Substitution

$$\begin{aligned} \frac{X}{r} &= \cos \omega \sin(\psi - \varphi) + \frac{u}{4} \sin \omega \sin(\psi - \varphi) + \frac{v}{4} \left[\sin \omega \cos \omega \cos(\psi - \varphi) + \sin^2 \omega \operatorname{tg} \omega \right], \\ \frac{Y}{r} &= 1 - \cos(\psi - \varphi) - \frac{u}{4} \operatorname{tg} \omega \cos(\psi - \varphi) + \frac{v}{4} \sin \omega \sin(\psi - \varphi), \\ \frac{Z}{r} &= -\sin \omega \sin(\psi - \varphi) - \frac{u}{4} \operatorname{tg} \omega \sin \omega \sin(\psi - \varphi) + \frac{v}{4} \left[1 - \cos(\psi - \varphi) \right] \sin^2 \omega \end{aligned}$$

sowie durch die Eintragung in die Gleichung

$$Y \frac{dY}{dt} + Z \frac{dZ}{dt} + XY + kZ = 0$$

die die Entsprechung definiert. Man erhält unter den Lösungen dieser Gleichung die Lösung

$$\psi = \varphi.$$

Die Werte X, Y, Z als Funktionen von t werden dann sein:

$$\begin{cases} X = -\frac{k}{4} (e^t - e^{-t}), \\ Y = \frac{k}{4} (e^t + e^{-t}) \\ Z = 0. \end{cases} \quad (7)$$

In die Gleichung

$$\frac{dZ}{dt} = \theta_1 Y - k,$$

eingetragen ergibt sich

$$\theta_1 = \frac{k}{Y} = \frac{4e^t}{e^{2t} + 1}. \quad (8)$$

Die Bestimmung der neun Richtungskosinus des Dreibeines des Gangaxoides ergibt sich durch die Integration der Riccati-Gleichung:

$$(e^t + e^{-t}) \left(\frac{dx}{dt} + ix \right) = 2i(1 - x^2), \quad (9)$$

wo x natürlich nicht die gleiche Bedeutung wie in Gleichung 1 hat. Die Gestalt von (9) führt zur partikulären Lösung in der Form

$$x = Ae^t + Be^{-t},$$

worin die Konstanten A und B zu bestimmen sind. Diese Form von x muß (9) befriedigen. Daraus erhält man von A und B :

$$\begin{aligned} A(1+i) &= 2iA^2, \\ B(i-1) &= 2iB^2, \\ A(i+1) + B(i-1) &= 2i(1-2AB). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden erfüllt durch

$$A = \frac{i-1}{2}, \quad B = -\frac{i+1}{2}.$$

Daraus ergibt sich die partikuläre Lösung der Gleichung (9) zu

$$x_0 = -\frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) + \frac{i}{2} (e^t - e^{-t}). \quad (10)$$

Um die allgemeinen Lösungen zu finden, setzen wir

$$x = x_0 + \frac{1}{\lambda};$$

wobei λ durch die Gleichung (11) definiert wird

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2i}{e^t + e^{-t}} - i\lambda - 2\lambda \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \quad (11)$$

Aus deren Integration erhalten wir

$$\lambda = \frac{e^t + e^{-t} + i(e^t - e^{-t}) + (h + ih_1)e^{-it}}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Wir setzen die Abkürzungen wie folgt ein:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^t + e^{-t} = u, \\ e^t - e^{-t} = v, \\ u - iv + (h - ih_1)e^{-it} = P, \\ u - iv + (h - ih_1)e^{it} = Q. \end{array} \right. \quad (12)$$

und bezeichnen schließlich mit x_1 den konjugierten Ausdruck von x . Auf diese Weise wird die allgemeine Lösung von (9)

$$x = x_0 + \frac{u^2}{P}.$$

Nun weiß man: wenn σ eine Lösung dieser Gleichung und σ' konjugiert imaginär zu σ sind, dann ist $\frac{1}{\sigma'}$ eine Lösung der Gleichung. Daraus folgt, daß

$$y = \frac{-1}{x_1 + \frac{u^2}{Q}}$$

auch eine Lösung der Gleichung (9) wird.

Nach dieser Feststellung nehmen wir nun mit $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2$ die neun Kosinusse des an die Gangaxoide gebundenen Dreibeins. Betrachten wir ein festes Dreibein des Körpers, so ergeben sich jeweils die folgenden drei Gruppen

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = \frac{1-xy}{x-y}, & \alpha', \beta', \gamma'; \\ a_1 = i \frac{1+xy}{x-y}, & \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \\ a_2 = \frac{x+y}{x-y}, & \alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2. \end{array} \right.$$

Die Konstanten h und h_1 in x und y ändern sich von einer Gruppe zur anderen; zur weiteren Ermittlung dieser Gruppen erwähnen wir, daß für $t = 0$

$$\begin{array}{lll} \alpha = 0, & \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, \\ \beta = 0, & \beta_1 = 0, & \beta_2 = -1, \\ \gamma = -1; & \gamma_1 = 0; & \gamma_2 = 0. \end{array} \quad (T)$$

Setzen wir in x und y die Ausdrücke ein, so finden wir schließlich

$$a = \frac{PQ(x_0 + x_1) + u^2(P + Q)}{PQ(1 + x_0x_1 + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1))},$$

$$a_1 = i \frac{PQ(x_1 - x_0) + u^2(P - Q)}{PQ(1 + x_0x_1 + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1))},$$

$$a_2 = \frac{PQ(x_0x_1 - 1) + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1)}{PQ(1 + x_0x_1 + u^2(u^2 + Px_0 + Qx_1))}.$$

1. Ermittlung von $\alpha', \alpha'_1, \alpha'_2$: Für $t = 0$ nach dem Schema (T) erhalten wir $x = i$; und es folgt daher

$$h = 0, \quad h_1 = -2,$$

$$\alpha' = \frac{v \cos t}{u},$$

$$\alpha'_1 = \frac{4 \cos t - uv \sin t}{u^2},$$

$$\alpha'_2 = \frac{2(u \sin t + v \cos t)}{u^2}.$$

2. Ermittlung von $\beta', \beta'_1, \beta'_2$: Nach dem Schema (T) erhält man für $t = 0$

$$x = 0.$$

Daher ist

$$h = 2, \quad h_1 = 0,$$

$$\beta' = \frac{v \sin t}{u},$$

$$\beta'_1 = \frac{4 \sin t - uv \cos t}{u^2},$$

$$\beta'_2 = \frac{2(v \sin t + u \cos t)}{u^2}.$$

3. Ermittlung von $\gamma', \gamma'_1, \gamma'_2$: In diesem Fall

$$x = -1 \quad h = \infty, \quad h_1 = \infty,$$

$$\gamma' = \frac{2}{u},$$

$$\gamma'_1 = \frac{2v}{u^2},$$

$$\gamma'_2 = \frac{v^2}{u^2}.$$

Wenn man nun u, v in Gleichung (12) einsetzt, erhält man die folgenden neun Kosinus-
nusse:

$$\begin{cases}
 \alpha' = \frac{(e^t - e^{-t}) \cos t}{e^t + e^{-t}}, \\
 \beta' = \frac{(e^t - e^{-t}) \sin t}{e^t + e^{-t}}, \\
 \gamma' = \frac{-2}{e^t + e^{-t}}; \\
 \alpha'_1 = \frac{4 \cos t - (e^{2t} - e^{-2t}) \sin t}{(e^t + e^{-t})^2}, \\
 \beta'_1 = \frac{4 \sin t + (e^{2t} - e^{-2t}) \cos t}{(e^t + e^{-t})^2}, \\
 \gamma'_1 = \frac{2(e^t - e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2};
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 \alpha'_2 = \frac{2[e^t + e^{-t}] \sin t + (e^t - e^{-t}) \cos t}{(e^t + e^{-t})^2}, \\
 \beta'_2 = \frac{2[e^t - e^{-t}] \sin t - (e^t + e^{-t}) \cos t}{(e^t + e^{-t})^2}, \\
 \gamma'_2 = \frac{(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2}.
 \end{cases}$$

4. Ermittlung der Gangaxoide: Die Koordination des Zentralpunktes auf der durch diesen Punkt gehenden Achse sind

$$\xi = \alpha' X - \alpha'_1 Y - \alpha'_2 Z,$$

$$\eta = \beta' X - \beta'_1 Y - \beta'_2 Z,$$

$$\zeta = \gamma' X - \gamma'_1 Y - \gamma'_2 Z,$$

worin X, Y, Z durch die Gleichung (7) definiert sind. Für einen Punkt dieser Fläche ergeben sich die Koordinaten

$$x' = \xi + \alpha' q \quad \text{usw.}$$

Die Größen der Invarianten dieser Fläche sind

$$0 = \frac{4}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{geodätische Krümmung der Fläche}$$

$$k = -r \operatorname{tg} \omega, \quad \text{Verteilungsparameter}$$

$$h = Y - \frac{dX}{dt} = \frac{k}{2} (e^t + e^{-t}). \quad \text{Längsverschiebung}$$

Die Asymptote ist ein Kegel mit $Z=0$.

Literatur

- [1] Suh, C.H.: Differential Displacement Matrix and Generation of Screw Axes Surfaces in Kinematics. Trans. ASME, J. Eng. Ind., Series B, **93**, 1–10 [1971].
- [2] Dizioğlu, B.: Kinematische Geometrie der Axoide und die Bahnfläche einer Geraden. Mechanism and Machine Theory, **24**, 431–438 [1989].
- [3] Weatherburn, C.E.: Differential Geometry of Three Dimensions. Vol. 1, 135–139. Cambridge University Press, London, 1927.
- [4] Burmeister, L.: Kinematische Flächenerzeugung mittelst cylindrischer Rollung. Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXXIII, 337–348 [1888].
- [5] Beyer, R.: Technische Raumkinematik, S. 228–235. Springer-Verlag. 1963.
- [6] Dizioğlu, B.: Analyse und Synthese der Axoide eines räumlichen starren Körpers. Forschung im Ingenieurwesen, S. 53–66. VDI Verlag 2/1988.
- [7] Antomari, X: Application de la méthode à l'étude des surfaces réglées. Mouvement d'un corps solide à cinq conditions (thèses). Librairie Nony. Paris, 1894.